www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۲۳ / ۳ / ۱۳۸۶	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۶		اداره کل سنجش وارزشیابی تحصیلی	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که حاصل ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است.	۱
۲	برای هر عدد طبیعی n با استفاده از اصل استقراء ثابت کنید : $5^n - 4n - 1$ بر عدد ۱۶ بخش پذیر است .	۱/۵
۳	می دانیم $\sqrt{5}$ گنگ است با استفاده از برهان خلف ثابت کنید عدد $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ نیز گنگ است.	۱
٤	به روش بازگشتی ثابت کنید : $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$	۱
۵	درون یک مربع به ضلع واحد ، ۱۰ نقطه انتخاب می کنیم ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از ده نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{3}$ است.	۱
٦	اگر $A = \{2^k \mid k \in N \ , \ k \leq 2\}$ و $B = \{x \mid x \in N \ , \ x^2 < 10\}$ الف) عضوهای مجموعه $A^2 - B^2$ را مشخص کنید. ب) $A^2 - B^2$ چند زیر مجموعه دارد؟	۱/۵
۷	به کمک جبر مجمو عه ها ثابت کنید : $A - (B \cap C \cap D) = (A - B) \cup (A - C) \cup (A - D)$	۱
۸	تمام افرازهای مجموعه $A = \{a , b , c\}$ را بنویسید.	۱
۹	رابطه R در $Z^2 - \{(0,0)\}$ به صورت مقابل تعریف شده است . $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow \frac{a}{b^3} = \frac{c}{d^3}$ الف) نشان دهید R یک رابطه‌ی هم ارزی است . ب) کلاس هم ارزی $[(3,-1)]$ را تعیین کنید .	۲
۱۰	یک سکه را ۳ بار می اندازیم مطلوبست تعیین : الف) فضای نمونه ای ب) پیشامد A که در آن لااقل ۲ بار رو بیاید . ج) پیشامد B که در آن هر سه بار سکه به یک طرف ظاهر شود . د) پیشامد $A \Delta B$	۲
	«ادامه‌ی سؤالات در صفحه‌ی دوم»	

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۲۳ / ۳ / ۱۳۸۶	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۶		اداره کل سنجش وارزشیابی تحصیلی	

ردیف	سؤالات	نمره
۱۱	از بین ٤ کارمند ۲ تکنسین و ۳ کارگر ، کمیته ای ۵ نفره تشکیل می دهیم . مطلوب است احتمال آنکه : الف) در کمیته کارگری وجود نداشته باشد . ب) در کمیته حد اکثر یک کارمند وجود داشته باشد .	۱/۷۵
۱۲	از مجموعه اعداد $\{۱و۲و۳و.....۱۰۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می کنیم . احتمال اینکه عدد انتخابی بر ۲ یا بر ۷ یا بر هر دو بخش پذیر باشد چقدر است ؟	۱/۵
۱۳	اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $p\{a,b,c\}=\frac{۱}{۲}$ و $p\{a,b,d\}=\frac{۲}{۳}$ آنگاه $p\{a,b\}$ را بدست آورید .	۱/۲۵
۱٤	فرض کنیم دو قطعه چوب داریم که طولهای آنها به ترتیب ۱ و ۰/۵ متر باشد . قطعه بزرگتر را با اره دو قسمت می کنیم که در نتیجه سه قطعه چوب حاصل می شود، احتمال اینکه سه‌قطعه چوب تشکیل یک مثلث بدهندچقدر است ؟	۱/۵
۱۵	اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند ثابت کنید : $P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-۱$	۱
	«موفق باشید» جمع نمره	۲۰

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : **جبر و احتمال**	*رشته :* **ریاضی و فیزیک**
سال سوم آموزش متوسطه	*تاریخ امتحان :* **۲۳ / ۳ / ۱۳۸۶**
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **نوبت دوم (خرداد ماه)** سال ۱۳۸۶	***اداره کل سنجش وارزشیابی تحصیلی***

ردیف	*راهنمای تصحیح*

۱

$x = 2k$

$y = 2k+2$ (۰/۲۵) $\quad x.y.z = 2k(2k+2)(2k+4)$ (۰/۲۵)

$z = 2k+4$ $\quad = 2^3 k(k+1)(k+2)$ (۰/۲۵)

$= 8k'$ (۰/۲۵)

۲

$P(1): 5^1 - 4 - 1 = 0 = 0 \times 16$ (۰/۲۵)

$P(k): 5^K - 4k - 1 = 16m$ (۰/۲۵)

$P(k+1): 5^{k+1} - 4k - 5 = 16m'$ (۰/۲۵)

ضرب طرفین فرض در ۵ $5^{k+1} - 20K - 5 = 16m \times 5 \Rightarrow 5^{k+1} - 4K - 16k - 5 = 16m \times 5$ (۰/۵)

$5^{k+1} - 4k - 5 = 16m \times 5 + 16k = 16(5m + k)$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow 5^{k+1} - 4k - 5 = 16m'$

۳

برهان خلف : فرض کنیم $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ گنگ نباشد پس گویاست . (۰/۲۵)

$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 + \sqrt{5} = \frac{a^3}{b^3} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a^3}{b^3} - 2$ (۰/۵)

گویا = گنگ

به تناقض رسیدیم پس $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ گنگ است. (۰/۲۵)

۴

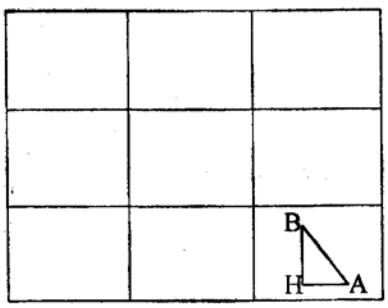
$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y \Leftrightarrow$ (۰/۲۵)

$(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0 \Leftrightarrow$ (۰/۲۵)

$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$ بدیهی است (۰/۵)

۵

بنابر اصل لانه کبوتری ده نقطه را به منزله ده کبوتر و ۹ قسمت را به عنوان لانه در نظر می گیریم چون $10 > 9$ پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر درون یک لانه است. (۰/۲۵)



(۰/۲۵)

$(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2$

$(AB)^2 < \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$ (۰/۲۵)

$(AB)^2 < \frac{2}{9}$

$AB < \frac{\sqrt{2}}{3}$ (۰/۲۵)

«ادامه در صفحه‌ی دوم»

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : **جبر و احتمال**	رشته : **ریاضی و فیزیک**
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان : **۲۳ / ۳ / ۱۳۸۶**
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **نوبت دوم (خرداد ماه)** سال ۱۳۸۶	***اداره کل سنجش وارزشیابی تحصیلی***

ردیف	راهنمای تصحیح

۶

$A=\{۲,۴\}$ $B=\{۱,۲,۳\}$ (۰/۲۵)

الف) $A^۲=\{(۲,۲),(۲,۴),(۴,۲),(۴,۴)\}$ (۰/۲۵)

$B^۲=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳)\}$ (۰/۵)

$A^۲-B^۲=\{(۲,۴),(۴,۲),(۴,۴)\}$ (۰/۲۵)

ب) $۲^۳=۸$ (۰/۲۵)

۷

طرف اول $=A\cap(B\cap C\cap D)'=[A\cap(B'\cup C'\cup D')]=$ (۰/۵)

$(A\cap B')\cup(A\cap C')\cup(A\cap D')=(A-B)\cup(A-C)\cup(A-D)$ (۰/۵)

۸

$\{a\},\{b\},\{c\}$ (۰/۲۵) $\{a,b,c\}$ (۰/۲۵)

$\{a\},\{b,c\}$ $\{b\},\{a,c\}$ $\{c\},\{a,b\}$ (۰/۵)

۹

۱) $(a,b)R(a,b)\Leftrightarrow\frac{a}{b^۳}=\frac{a}{b^۳}$ (۰/۲۵)

۲) $(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow\frac{a}{b^۳}=\frac{c}{d^۳}\Rightarrow\frac{c}{d^۳}=\frac{a}{b^۳}\Rightarrow(c,d)R(a,b)$ (۰/۵)

۳) $\left.\begin{array}{l}(a,b)R(c,d)\Rightarrow\frac{a}{b^۳}=\frac{c}{d^۳}\\(c,d)R(e,f)\Rightarrow\frac{c}{d^۳}=\frac{e}{f^۳}\end{array}\right\}\overset{(۰/۵)}{\Rightarrow}\frac{a}{b^۳}=\frac{e}{f^۳}\Rightarrow(a,b)R(e,f)$

چون R هر سه خاصیت بازتابی ، تقارنی و ترایایی را دارد پس R هم ارزی است. (۰/۲۵)

$[(۳,-۱)]=\{(x,y)\mid(x,y)R(۳,-۱)\}$ (۰/۲۵)

$\frac{x}{y^۳}=\frac{۳}{(-۱)^۳}\Rightarrow x=-۳y^۳$ (۰/۲۵)

«ادامه در صفحه‌ی سوم»

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : **جبر و احتمال**	*رشته :* **ریاضی و فیزیک**
سال سوم آموزش متوسطه	*تاریخ امتحان :* **۲۳ / ۳ / ۱۳۸۶**
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **نوبت دوم (خرداد ماه)** سال ۱۳۸۶	***اداره کل سنجش وارزشیابی تحصیلی***

ردیف	*راهنمای تصحیح*
۱۰	**الف)** $S=\{(پ,پ,پ),(پ,پ,ر),(پ,ر,پ),(پ,ر,ر),(ر,پ,پ),(ر,پ,ر),(ر,ر,پ),(ر,ر,ر)\}$ (۰/۵) **ب)** $A=\{(پ,پ,ر),(پ,ر,پ),(پ,ر,ر),(ر,پ,پ),(ر,پ,ر),(ر,ر,پ),(ر,ر,ر)\}$ (۰/۵) **ج)** $B=\{(پ,پ,پ),(پ,پ,ر),(پ,ر,پ),(ر,پ,پ),(ر,ر,ر)\}$ (۰/۵) **د)** $A\Delta B=\{(پ,پ,ر),(پ,ر,پ),(ر,پ,پ),(ر,ر,ر)\}$ (۰/۵)
۱۱	**الف)** $p(A)=\dfrac{\binom{۶}{۵}}{\binom{۹}{۵}}=\dfrac{۶}{۱۲۶}=\dfrac{۱}{۲۱}$ (۰/۷۵) **ب)** $p(B)=\dfrac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۴}+\binom{۴}{۰}\binom{۵}{۵}}{\binom{۹}{۵}}=\dfrac{۴\times۵+۱\times۱}{۱۲۶}=\dfrac{۲۱}{۱۲۶}=\dfrac{۱}{۶}$ (۱)
۱۲	**A: پیشامد بخش پذیر بودن عدد انتخابی بر ۲** $\Rightarrow P(A)=\dfrac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۲}\right]}{۱۰۰۰}=\dfrac{۵۰۰}{۱۰۰۰}$ (۰/۲۵) **B: پیشامد بخش پذیر بودن عدد انتخابی بر ۷** $\Rightarrow P(B)=\dfrac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۷}\right]}{۱۰۰۰}=\dfrac{۱۴۲}{۱۰۰۰}$ (۰/۲۵) چون $(۲,۷)=۱\Rightarrow P(A\cap B)=\dfrac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۱۴}\right]}{۱۰۰۰}=\dfrac{۷۱}{۱۰۰۰}$ (۰/۵) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{۵۰۰}{۱۰۰۰}+\dfrac{۱۴۲}{۱۰۰۰}-\dfrac{۷۱}{۱۰۰۰}=\dfrac{۵۷۱}{۱۰۰۰}$ (۰/۵)

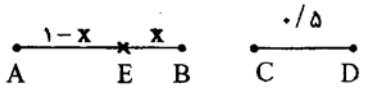
«ادامه در صفحه‌ی چهارم »

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : **جبر و احتمال**	رشته : **ریاضی و فیزیک**
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان : **۲۳ / ۳ / ۱۳۸۶**
دانش آموزان و داوطلبان ازاد سراسر کشور در **نوبت دوم (خرداد ماه)** سال ۱۳۸۶	***اداره کل سنجش وارزشیابی تحصیلی***

ردیف	راهنمای تصحیح
۱۳	$p\{a\ ,\ b\ ,\ c\}+p\{d\}=۱$ (۰/۲۵) $p\{d\}=۱-p\{a\ ,\ b\ ,\ c\}=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$ (۰/۵) $p\{a\ ,\ b\}=\frac{۲}{۳}-p\{d\}=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۶}$ (۰/۵)
۱۴	**فرض می کنیم قطعه چوب ۱ متری در نقطه E بریده شود که به فاصله Xاز یک سر چوب قرار دراد . بنابراین فضای نمونه ای را می توان خط AB به طول ۱ متر در نظر گرفت (۰/۲۵)**  **برای اینکه سه پاره خط AE ، EB، CD ، تشکیل یک مثلث بدهند باید طول هر پاره خط از مجموع طولهای دو پاره خط دیگر کمتر شود .** $AE+EB\rangle CD\Rightarrow ۱-x+x\rangle\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۱\rangle\frac{۱}{۲}$ $AE+CD\rangle EB\Rightarrow ۱-x+\frac{۱}{۲}\rangle x\Rightarrow\frac{۳}{۲}\rangle ۲x\Rightarrow\frac{۳}{۴}\rangle x$ (۰/۷۵) $EB+CD\rangle AE\Rightarrow x+\frac{۱}{۲}\rangle ۱-x\Rightarrow ۲x\rangle\frac{۱}{۲}\Rightarrow x\rangle\frac{۱}{۴}$ $A=\{x\mid\frac{۱}{۴}\langle x\langle\frac{۳}{۴}\}\xrightarrow[(۰/۲۵)]{}P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱}=\frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵)
۱۵	$P(A\cup B)\le ۱\Rightarrow ۱-P(A\cup B)\ge ۰$ (۰/۲۵) $۱-\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)\ge ۰$ (۰/۵) $\Rightarrow P(A\cap B)\ge P(A)+P(B)-۱$ (۰/۲۵)

مصححین محترم ؛

لطفاً راه حل های صحیح دیگر را نیز بارم بندی نمایید.

www.alm.loxblog.com